Exercice 1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières dont les termes généraux sont les suivants :

a/ $U_n = \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ b/ $U_n = \frac{n^n}{n!} z^n$ c/ $U_n = \frac{(-1)^n z^n}{n^n}$

d/ $U_n = (-2)^n \cdot \frac{z^{3n+1}}{n+1}$ e/ $U_n = a^n z^{2n+1}$ $(a \in \mathbb{C})$

Exercice 2 Déterminer le rayon de convergence des séries entières et calculer leur somme

a/ $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n+2}}{4n+2}$ b/ $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$

Exercice 3 Déterminer le domaine de convergence des séries suivantes et leur somme

a/ $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n(n+1)}$ b/ $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(2n+1)!}$

Exercice 4 Déterminer le Développement en série entière de f

a/ $f(x) = \frac{x+2}{(x-1)(x-2)}$ b/ $f(x) = \ln\left(\frac{1+2x}{5-x}\right)$

Exercice 5 Soit la série entière de t.g $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$ $n \geq 2$

a/ Déterminer le domaine de convergence de $\sum_{n\geq 2} f_n(x)$

b/ Donner le domaine de convergence de $\sum_{n\geq} f_n'(x)$ et $\sum_{n\geq} f_n''(x)$

c/ Calculer $\sum_{n\geq 2} f_n(x)$

Exercice 6 : 1/ Déterminer le développement en série entière à l'origine de f

a/ $f(x) = \ln(1 + x - 2x^2)$ b/ $g(x) = (\text{Arc}\sin x)^2$

2/ Calculer :

a/ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)!}$ b/ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{n+4} \cdot \frac{x^n}{n!}$

c/ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$ d/ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(6n+2)(6n+5)}$

ETUDUP.com

Exercice 7

On considère l'équation différentielle (E): $xy'' + 3y' - 3x^3 y = 0$

a/ Rechercher la solution F de l'éq (E), développable en série entière autour de l'origine telle que $F(0) = 1$

b/ Reconnaître F comme expression de fonctions usuelles

Exercice 8

Soit l'éq diff: (E): $xy'' + 2y' + \omega^2 xy = 0$ ω: constante

Déterminer la solution de (E) sous forme de série entière

Exercice 9

Rechercher les solutions développables en série entière de l'équation différentielle : $4xy'' + 2y' - y = 0$

Convergence de 3 séries alternées

Exercice 1

Soit la suite du reste $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p v_p$ avec $v_p > 0$; $(v_p) \downarrow$, $\lim_{p \to +\infty} v_p = 0$

Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}$: $|R_n| \leq v_{n+1}$

Exercice 2

Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n + x^2} \quad \text{sur } [-1, 1]$$

Exercice 3

Soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x\, n^x}$, $x \in \mathbb{R}^*$

1°/ Etudier la convergence simple de cette série

2°/ M. que la série c.v uniformément sur $[a, +\infty[$ où $a > 0$, en déduire que sa somme est continue sur $]0, +\infty[$

Exercice 4 Soit la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$

1°/ M. que le reste d'ordre n tend vers 0

2°/ En déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$

4°/ En déduire $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

ETUDUP .com

Exercice 1

a/ $U_n = \frac{z^n}{\sqrt{n}}$; $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{z^n}\right| = |z| \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |z|$

Si $|z| < 1$ alors $\sum U_n$ c.v d'où $R = 1$

b/ $U_n = \frac{n^n}{n!} z^n$; $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1} \cdot \frac{n!}{n^n \cdot z^n}\right| = \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot z\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} e.|z|$

car $\lim_{+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{+\infty} e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} = \lim_{+\infty} e^{\frac{\ln(1+1/n)}{1/n}} = e^1 = e$

Si $e.|z| < 1$ c.à.d $|z| < 1/e$ alors $\sum U_n$ c.v d'où $R = \frac{1}{e}$

c/ $U_n = \frac{(-1)^n z^n}{n^n}$; $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} \cdot z^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(-1)^n \cdot z^n}\right| = \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot z\right| \to \frac{1}{e} \times 0 \times |z|$

$\forall z$: $0.|z| < 1$ donc $\sum U_n$ c.v $\Rightarrow R = \frac{1}{0} = +\infty$

d/ $U_n = (-2)^n \cdot \frac{z^{3n+1}}{n+1}$; $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{(-2)^{n+1} \cdot z^{3n+4}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{(-2)^n z^{3n+1}}\right| = \left|2 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot z^3\right| \xrightarrow{n\to}$

Si $2|z|^3 < 1$ c.à.d $|z| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ alors $\sum U_n$ c.v d'où $R = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

e/ $U_n = a^n \cdot z^{2n+1}$; $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{a^{n+1} \cdot z^{2n+3}}{a^n \cdot z^{2n+1}}\right| = |a| \cdot |z|^2$

Si $|a||z|^2 < 1$ c.à.d $|z| < \frac{1}{\sqrt{|a|}}$ alors $\sum U_n$ c.v d'où $R = \frac{1}{\sqrt{|a|}}$

Exercice 2

a/ $U_n(x) = \frac{x^{4n+2}}{4n+2}$; $\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \left|\frac{x^{4n+6}}{4n+6} \cdot \frac{4n+2}{x^{4n+2}}\right| = |x|^4 \cdot \frac{4n+2}{4n+6} \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|^4$

Si $|x|^4 < 1$ c.à.d $|x| < 1 \iff -1 < x < 1$ alors $\sum U_n(x)$ c.v d'où $R = 1$

Posons $\forall x \in]-1,1[$: $f(x) = \sum_{n\geq 0} U_n(x)$

f est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$: $f'(x) = \sum_{n\geq 0} U_n'(x) = \sum_{n\geq 0} x^{4n+1}$

Alors $f'(x) = x \cdot \sum_{n\geq 0} x^{4n} = x \sum_{n\geq 0} (x^4)^n = x \cdot \frac{1}{1-x^4} = \frac{x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} \cdots$

par identification on trouve $f'(x) = \frac{1}{4(1-x)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{4(1+x)}$

d'où $f(x) = -\frac{1}{4}\ln(1-x) - \frac{1}{4}\ln(1+x) + \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + k$; Comme $f(0) = 0$ alors $k = 0$

d'où $f(x) = \frac{1}{4}\left(\ln(1+x^2) - \ln(1-x^2)\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

b/ $U_n(x) = \frac{x^n}{(2n)!}$; $\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{x^n}\right| = \left|\frac{x}{(2n+1)(2n+2)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \forall x$

d'où $\sum U_n(x)$ c.v $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow R = +\infty$

- Si $x = 0$ alors $f(0) = 1$
- Si $x > 0$ alors $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$
- Si $x < 0$ alors $f(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-x})$

ETUDUP.com

Exercice 3

/* $U_n(x) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n(n+1)}$; $\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+2} \cdot x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{(-1)^{n+1} \cdot x^n}\right| = \left|\frac{n+1}{n+2} \cdot x\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$

D'après le critère d'Alembert

si $|x| < 1$ càd $-1 < x < 1$ alors $\sum U_n(x)$ c.v (d'où $R = 1$)

si $x = 1$ alors $\sum_{n\geq 1} U_n(1) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ c.v

si $x = -1$ alors $\sum_{n\geq 1} U_n(-1) = \sum_{n\geq 1} \frac{-1}{n(n+1)}$ c.v car

dans les 2 cas : $|U_n(1)| = |U_n(-1)| = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ c.v

donc le domaine de convergence de la série est $D = [-1, 1]$

Somme : Posons $\forall x \in [-1, 1]$: $f(x) = \sum_{n\geq 1} U_n(x)$

on a : $U_n(x) = (-1)^{n+1} \cdot x^n \cdot \frac{1}{n(n+1)} = (-1)^{n+1} \cdot x^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} - (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n+1}$

Rappel : $\forall x \in]-1, 1[$: $\ln(1+x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$

Posons $g(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n\geq 2} (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n}$

d'où $x\,g(x) = \sum_{n\geq 2} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} = \sum_{n\geq 2} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n} - x$

car $x\,g(x) = \ln(1+x) - x$; Ainsi $\begin{cases} \text{si } x = 0 & f(0) = 0 \\ \text{si } x \neq 0 & f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(1+x) - 1 \end{cases}$

si $x \neq 0$ $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} - 1$

$U_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(2n+1)!}$; $\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \left|\frac{x^{n+2}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{n+1}}\right| = \left|\frac{x}{(2n+2)(2n+3)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sum U_n(x)$ c.v d'où le domaine de c.v est $D = \mathbb{R}$ et $R = +\infty$

Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}$: $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$

Pour $x \geq 0$: posons $x = t^2$ alors :

$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{t^{2n+2}}{(2n+1)!} = t \cdot \sum_{n\geq 0} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = t\,\mathrm{sh}\,t = \sqrt{x}\,\mathrm{sh}\sqrt{x}$

Pour $x \leq 0$ posons $x = -t^2$ alors :

$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \cdot \frac{t^{2n+2}}{(2n+1)!} = -t \cdot \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = -t \sin t = -\sqrt{-x} \cdot \sin\sqrt{-x}$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\,\mathrm{sh}\sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}\sin\sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$$

ETUDUP.com

Exercice 4

a/ $f(x) = \frac{x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$. Par identification on trouve $a=3$ et $b=-4$ d'où

$f(x) = \frac{3}{1-x} - \frac{4}{2-x} = 3.\frac{1}{1-x} - 2.\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$

Si $|x|<1$ et $|\frac{x}{2}|<1$ càd $|x|<1$ et $|x|<2$ d'où $|x|<1$ alors

$f(x) = 3.\sum_{n\geq 0} x^n - 2.\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 0} 3x^n - 2.\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\left(3 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)x^n$

b/ $f(x) = \ln\left(\frac{1+2x}{5-x}\right)$ f est définie si $\frac{1+2x}{5-x}$ càd $x \in]-\frac{1}{2}, 5[$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	5	$+\infty$
$\frac{1+2x}{5-x}$	$-$	0	$+$	$-$

Rappel : $\forall x \in]-1,1[: \ln(1+x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n}$

On a $f(x) = \ln(1+2x) - \ln(5-x) = \ln(1+2x) - \ln 5 - \ln\left(1-\frac{x}{5}\right)$

$\forall x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[: |2x|<1$ alors $\ln(1+2x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}.\frac{(2x)^n}{n}$

$\forall x \in]-5,5[: |-\frac{x}{5}|<1$ alors $\ln\left(1-\frac{x}{5}\right) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}.\frac{(x/5)^n}{n}$

d'où $\forall x \in]-1/2, 1/2[: f(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n} - \ln 5 - \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(-\frac{x}{5})^n}{n}$

$\forall x \in]\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[: f(x) = -\ln 5 + \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}\left[(-1)^{n-1}.2^n + \frac{1}{5^n}\right]$

Exercice 5 $f_n(x) = (-1)^n.\frac{x^n}{n(n+1)}$ $n \geq 2$

a/ $\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}.x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}.\frac{n(n+1)}{(-1)^n.x^n}\right| = \left|\frac{n}{n+2}\right|.|x| \xrightarrow{n\to+\infty} |x|$

- Si $|x|<1$ càd $-1<x<1$ alors $\sum f_n(x)$ c.v
- Pour $x=1$: $\sum f_n(1) = \sum\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ est une série alternée convergente car

$u_n = |f_n(1)| = \frac{1}{n(n+1)}$ est décroissante vers 0, positive

- Pour $x=-1$ $\sum f_n(-1) = \sum\frac{1}{n(n+1)}$ c.v car $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\sum\frac{1}{n^2}$ c

donc le domaine de convergence est $D = [-1,1]$

b/ * Domaine de convergence de $\sum_n f_n'(x) = \sum_n (-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1}$ ..

- $\sum_n f_n(x)$ c.v sur $]-1,1[$ donc de même $\sum_n f_n'(x)$
- Reste à voir la convergence aux bornes 1 et -1

Pour $x=-1$: $\sum f_n'(-1) = \sum_n (-1)^n\frac{(-1)^{n-1}}{n-1} = -\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n-1}$ diverge car $\frac{1}{n-1} \sim$ et $\sum\frac{1}{n}$

Pour $x=1$: $\sum f_n'(1) = \sum_n\frac{(-1)^n}{n-1}$ est une série alternée convergente car $\frac{1}{n-1}$ est décroissante vers 0.

donc le domaine de convergence de $\sum f_n'(x)$ est $D' =]-1,1]$

ETUSUP.com

* Domaine de convergence de $\sum f_n''(x) = \sum_{n\geq 2} (-1)^n x^{n-2} = \sum_{n\geq 2} (-x)^{n-2} = \sum_{n\geq 0} (-x)^n$

$\sum f_n''(x)$ est une série géométrique convergente si et ssi $|-x| < 1$ c.à.d $|x| < 1$

donc le domaine de C.V de $\sum f_n''(x)$ est $D'' =]-1, 1[$

c/ Calcul de $f(x) = \sum_{n\geq 2} f_n(x)$

On a $\forall x \in]-1,1[: \sum_{n\geq 2} f_n''(x) = \sum_{n\geq 0} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{1+x}$

d'où $f'(x) = \ln(1+x) + K$. $f'(0) = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow f'(x) = \ln(1+x)$

et $f(x) = \int \ln(1+x)\, dx = (1+x)\ln(1+x) - x + K$; $f(0) = 0 \Rightarrow K = 0$

d'où $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$

Exercice $x y'' + 3y' - 4x^3 y = 0$

a/ $y = F(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$; $y' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$; $y'' = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$

Alors on obtient : $\sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} 3n a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 2} -4 a_n x^{n+3} = 0$

Relation entre les premiers termes $2a_2 x + 6a_3 x^2 + 12 a_4 x^3 + 3a_1 + 6a_2 x + 9a_3 x^2 + 12 a_4 x^3 - 4a_0 x^3 = 0$

$\Rightarrow a_1 = 0$; $a_2 = 0$; $a_3 = 0$ et $a_4 = \frac{1}{6} a_0$

or $F(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$ —

Identification des coefficients de x^{n-1} : $n(n-1)a_n + 3n a_n - 4 a_{n-4} = 0 \Rightarrow (n^2 - n + 3n) a_n = 4 a_{n-4}$

$\Rightarrow a_n = \frac{4}{n(n+2)} a_{n-4}$

• On a $a_1 = 0 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}\ a_{4p+1} = 0$; $a_2 = 0 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N} : a_{4p+2} = 0$

$a_3 = 0 \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}\ a_{4p+3} = 0$

. Pour $n = 4p$: $a_{4p} = \frac{4}{4p(4p+2)} a_{4p-4} = \frac{1}{2p(2p+1)} a_{4p-4}$

$a_{4p-4} = \frac{4}{(4p-4)(4p-2)} a_{4p-8} = \frac{1}{(2p-2)(2p-1)} a_{4p-8}$

..

$\vdots$

$a_8 = \frac{4}{8 \times 10} a_4 = \frac{1}{4.5} a_4$

$a_4 = \frac{4}{4 \times 6} a_0 = \frac{1}{2.3} a_0$

En faisant le produit membre à membre : $a_{4p} = \frac{1}{(2p+1)!} a_0 = \frac{1}{(2p+1)!}$

d'où $F(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{4p}}{(2p+1)!}$

b/ Si $x = 0$ alors $F(0) = 0$

Si $x \neq 0$ alors $F(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \frac{\mathrm{sh}(x^2)}{x^2}$

ETUDUP .com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Electricité
Physique
Résumés
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Analyse
Diapo
Livres
Exercices
Mécanique
Contrôles Continus
Langues
MTU
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..